

Le problème traitait des polynômes de Tchebychev (étudiés dans la partie I) et de leur utilisation en approximation polynomiale, tout d'abord pour une norme euclidienne (partie II), puis pour la norme infinie (partie III).

Le sujet était bien construit, clair sans aucun problème de compréhension. Classique de part ses deux premières parties, il n'était ni difficile, ni long. Un certain nombre de candidats a traité toutes les questions.

Les thèmes mis en jeu étaient des fondamentaux du programme : trigonométrie, polynômes, intégration, espace préhilbertien et théorie des polynômes orthogonaux, séries, topologie, théorème des valeurs intermédiaires...

## Appréciation générale des copies

Le bilan est assez contrasté. Nous avons pu constater un nombre élevé de très bonnes copies (des candidats qui ont su profiter du « classicisme » du sujet), mais aussi, ce qui est très inquiétant pour des élèves de filière MP, une quantité importante de très mauvaises copies.

Le problème, pourtant peu difficile, a permis de déceler des lacunes très importantes :

- *le cours est souvent mal maîtrisé*, voire non su, il y a beaucoup trop d'énoncés de théorèmes incomplets ou même incorrects,
- *un grand manque de rigueur* a été constaté par la totalité des correcteurs, la rédaction doit être améliorée,
- *la réflexion est régulièrement insuffisante*, pour preuve les énormités rencontrées sur beaucoup de copies.

La moyenne de l'épreuve est de 8,95.

L'écart-type vaut 4,44.

En résumé, ce sujet a su jouer son rôle pour le concours commun polytechnique et a permis de classer les candidats.

## Remarques détaillées par question

### Partie I

1. Pour l'existence, très peu de candidats ont vérifié que le polynôme trouvé était bien de degré  $n$ . L'unicité a souvent été bien prouvée.
2. a) En général bien traitée, malgré des réponses parfois trop longues.  
b) RAS.  
c) Parfois oublié du cas particulier  $n = 0$ .
3. a) Beaucoup de candidats n'ont pas justifié que les racines trouvées étaient distinctes.

- b) Certains candidats se contentent de l'inégalité  $\forall x \in [-1;1], |T_n(x)| \leq 1$  pour affirmer que la norme est égale à 1.

## Partie II

4. Cette question a souvent été mal traitée.

Tout d'abord peu de candidats précisent que la fonction est continue sur l'ouvert  $] -1;1[$  donc localement intégrable, on peut alors s'occuper des problèmes au bord.

Des erreurs graves ont été rencontrées, attention :

- un produit de fonctions intégrables n'est pas forcément intégrable,
- une fonction continue sur un *ouvert* (en tout cas sur autre chose qu'un segment) n'est pas forcément intégrable sur cet ouvert.

5. a) Question délicate. Le théorème du cours (que beaucoup ont redémontré) permettait de montrer que la fonction  $h$  était nulle sur l'ouvert  $] -1;1[$ , puis on concluait qu'elle était nulle sur  $[-1;1]$  par continuité.

b) Certains candidats ne connaissent pas la définition du produit scalaire !

6. La grande majorité des candidats a oublié le cas où  $n = 0$ . La propriété « une famille orthogonale est libre » n'est pas toujours connue.

7. Questions de cours souvent mal traitées ! Il y a même des candidats qui ont ici évoqué Weierstrass !

8. L'ingrédient essentiel était le théorème de Pythagore, qui a rarement été cité.

9. a) Certains candidats ont affirmé que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f, E_n) = 0$  car «  $E_n$  tendait vers  $E$  » sans se soucier de donner un sens mathématique à cette dernière assertion.

b) Oubli fréquent de préciser que la suite  $(T_n)$  est bornée.

- 10.a) RAS.

b) Question pas facile, qui demandait beaucoup de rigueur dans la rédaction ; certainement la moins bien traitée du problème. On a, là aussi, pu se rendre compte que les connaissances étaient souvent imprécises avec des versions « farfelues » de théorèmes de Weierstrass.

11. Assez souvent réussie.

## Partie III

- 12.a) En général, assez bien traitée.

b) Oubli fréquent de préciser « dimension finie ».

- 13.a) Question délicate à rédiger notamment pour l'inégalité la moins évidente, très peu de réponses complètes.

Erreur grave rencontrée : «  $K \subset E_n$  donc  $d(f, K) \leq d(f, E_n)$  ».

b) Oubli fréquent de l'hypothèse « fonction continue ».

14. Très souvent réussie.

15.a) Des réponses parfois frauduleuses.

b) Question qui demandait de la rigueur. Un certain nombre de candidats l'ont réussi hormis le cas particulier  $f = P$  oublié par quasiment tous les candidats.

16. Assez réussie.

17. Des erreurs, notamment dans la rédaction.

18.a) Un certain nombre de candidats ont proposé le bon PMA, mais souvent, pour la justification, ont oublié de dire qu'il était bien de degré  $n$ .

b) Question réussie par la plupart de ceux qui avaient répondu à la précédente.